

# GEOMETRIA

## UDA N 2

### II PERIODO

**Competenza nr 11:** Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni

**Gli enti fondamentali della geometria, significato di postulato, assioma, teorema (ore)**

# POSTULATI FONDAMENTALI

- SONO PROPOSIZIONI CHE ESPRIMONO PROPRIETA' DEGLI ENTI GEOMETRICI CHE SI CHIEDONO DI ACCETTARE PER VERE SENZA DIMOSTRAZIONE (verità evidenti).
- I PRIMI POSTULATI SONO.
  1. **LO SPAZIO** CONTIENE INFINITI PUNTI, INFINITE RETTE E INFINITI PIANI,
  2. **UN PIANO** CONTIENE INFINITI PUNTI E INFINITE RETTE,
  3. **UNA RETTA** CONTIENE INFINITI PUNTI.

# TEOREMA

- Si puo' definire come una **implicazione logica** tra due predicati detti **ipotesi** (i) che esprime quello che si suppone essere vero e **tesi** (t), esprime quello che deve essere verificato.

$$I \Rightarrow T$$

**L'ENUNCIATO** Esprime il contenuto dell'implicazione logica da verificare e puo' essere vero o falso.

**LA DIMOSTRAZIONE** E' il processo deduttivo che porta ad affermare la verita' della tesi tutte le volte che si verifica l'ipotesi.

## **CONCETTI ED ENTI PRIMITIVI**

- **NON SI POSSONO DEFINIRE CON IDEE PIU' ELEMENTARI E SONO ESPRESSI DA PAROLE IL CUI SIGNIFICATO E' NOTO A TUTTI. NON ABBIAMO BISOGNO DI DEFINIRLI**
- **SONO CONCETTI PRIMITIVI:**
  1. MOVIMENTO RIGIDO, 2. APPARTENENZA
- **SONO ENTI PRIMITIVI:**
  1. PUNTO, 2. RETTA, 3. PIANO, 4. SPAZIO

- **PUNTO:** lo indico con la lettera maiuscola.

.A      .B      .C      .D

- **RETTA:** è un insieme di punti ed è ottenuta utilizzando il righello, prolungata indefinitamente da una parte e dall'altra e si indica con la lettera minuscola

r

- **PIANO:** è come un foglio di carta, ma con lunghezza e larghezza indefinite. Lo indico con  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\pi$ .
- **SPAZIO:** è tutto ciò che ci circonda

- **SEMIRETTA** :data una retta orientata  $r$  e un suo punto qualsiasi  $o$  , si chiama **semiretta** di origine  $o$  l'insieme costituito dal punto  $o$  stesso e dai punti di  $r$  che precedono o seguono  $o$  nel verso fissato.



## FIGURA

- SI DEFINISCE FIGURA UN INSIEME, NON VUOTO, DI PUNTI.
- ANCHE UN SINGOLO PUNTO COSTITUISCE UNA FIGURA GEOMETRICA.

## LO SPAZIO

E' L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI POSSIBILI E SI PUO' CONSIDERARE COME LA FIGURA CHE CONTIENE TUTTI I PUNTI E QUINDI TUTTA LA FIGURA

## **LA SUPERFICIE**

- **SI PUO' CONSIDERARE COME GENERATA DA UNA LINEA CHE SI MUOVE, MA PRIVA DI SPESSORE.**

## **SUPERFICIE PIANA**

- **SI PUO' IMMAGINARE COME UN FOGLIO ESTESO INDEFINITAMENTE IN TUTTE LE DIREZIONI.**

## POSTULATI DI APPARTENENZA

- DUE PUNTI DISTINTI APPARTENGONO A UNA E A UNA SOLA RETTA.
- PER DUE PUNTI DISTINTI PASSA UNA E UNA SOLA RETTA.

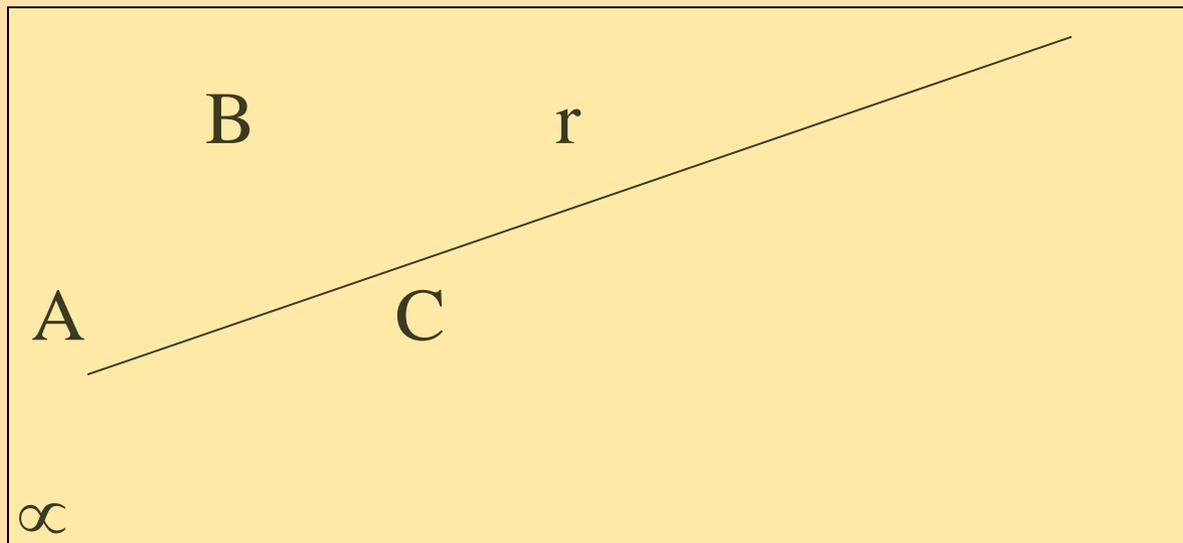
$A \in r, B \in r, C \notin r$



- SE TRE O PIU' PUNTI APPARTENGONO A UNA STESSA RETTA SI DICE CHE ESSI SONO **ALLINEATI**.

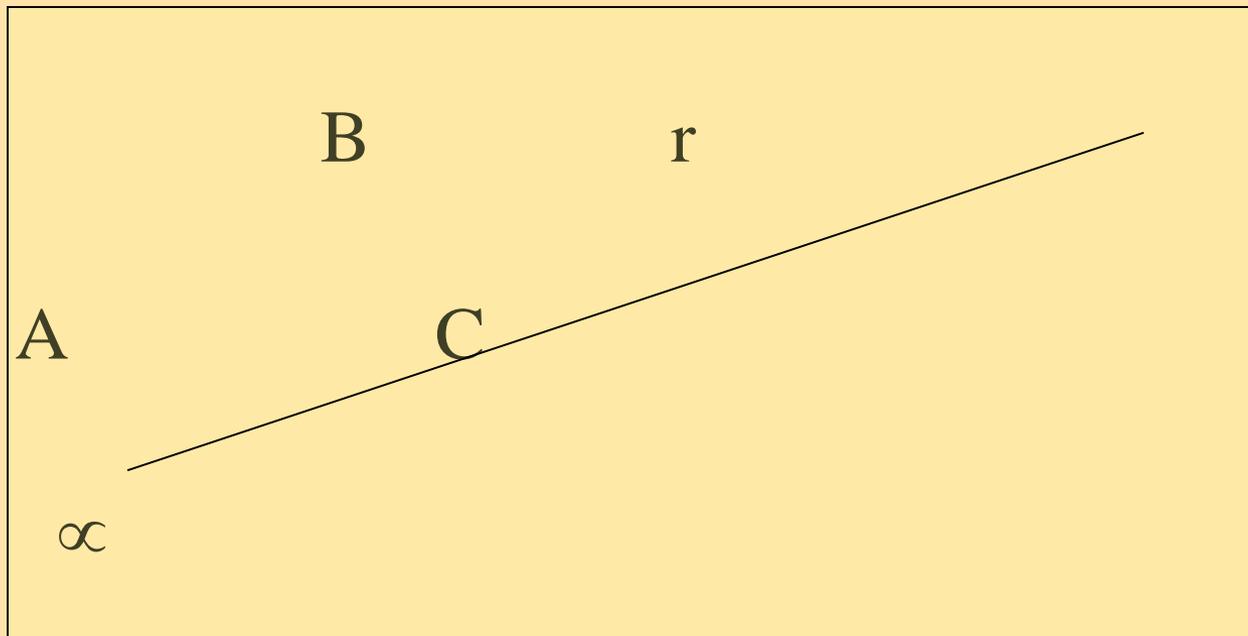


- TRE PUNTI NON ALLINEATI APPARTENGONO A UNO E A UN SOLO PIANO.
- PER TRE PUNTI NON ALLINEATI PASSA UNO E UN SOLO PIANO.
- TRE PUNTI NON ALLINEATI INDIVIDUANO UN PIANO E UNO SOLO.



- SE DUE PUNTI DI UNA RETTA APPARTENGONO AD UN PIANO, ALLORA LA RETTA E' CONTENUTA O GIACE NEL PIANO.

$$A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha, A \in r, B \in r, r \subset \alpha$$



## DEFINIZIONE DI SEGMENTO

- SI DEFINISCE **SEGMENTO** DI ESTREMI **A** E **B** L'INSIEME COSTITUITO DAI PUNTI **A** E **B** E DA TUTTI I PUNTI DELLA RETTA **AB** COMPRESI TRA **A** E **B**.

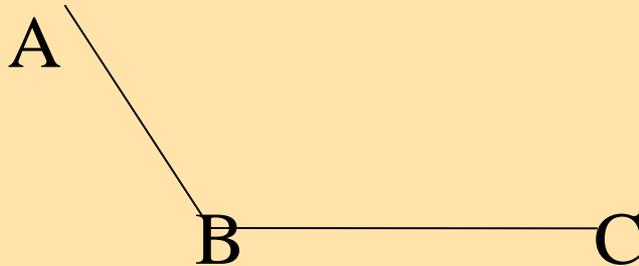


- IL SEGMENTO DI ESTREMI **A** E **B** SI INDICA CON **AB**;
- I SUOI PUNTI, DIVERSI DAGLI ESTREMI, SI DICONO PUNTI **INTERNI**, MENTRE I PUNTI CHE NON APPARTENGONO AL SEGMENTO SI DICONO **ESTERNI**.
- SE **A** E **B** COINCIDONO ( $A \equiv B$ ) IL SEGMENTO E' **NULLO**.

- PER **DISTANZA** TRA **A** E **B** SI INTENDE IL SEGMENTO DI ESTREMI **A** E **B**.
- QUANDO UN SEGMENTO **AB** E' SU UNA RETTA ORIENTATA, ANCHE I PUNTI DEL SEGMENTO **AB** RISULTANO ORDINATI. SI PARLA ALLORA DI **SEGMENTO ORIENTATO**.
- SE IL PUNTO **A** PRECEDE **B**, IL SEGMENTO SI INDICA CON **AB**.
- IL PUNTO **A** E' DETTO **ORIGINE**, MENTRE **B** E' DETTO **ESTREMO**.



- DUE SEGMENTI AVENTI IN COMUNE SOLAMENTE UN ESTREMO SI DICONO **CONSECUTIVI**

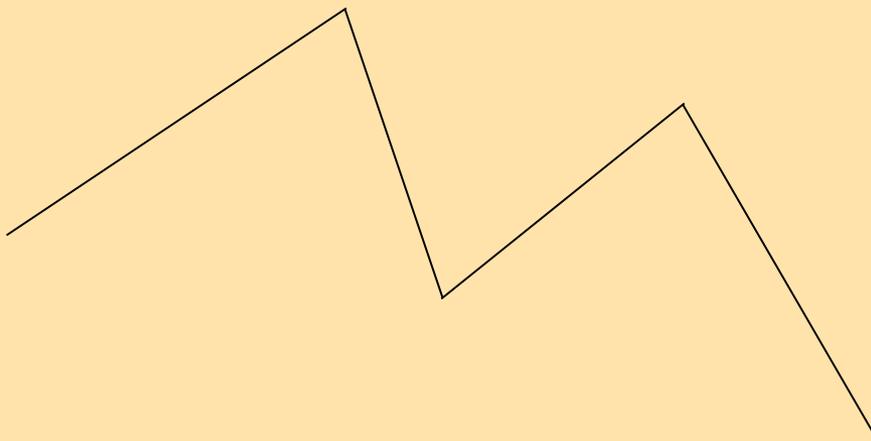


- DUE SEGMENTI CONSECUTIVI (**AB** E **BC**) SITUATI SULLA MEDESIMA RETTA SI DICONO **ADIACENTI**

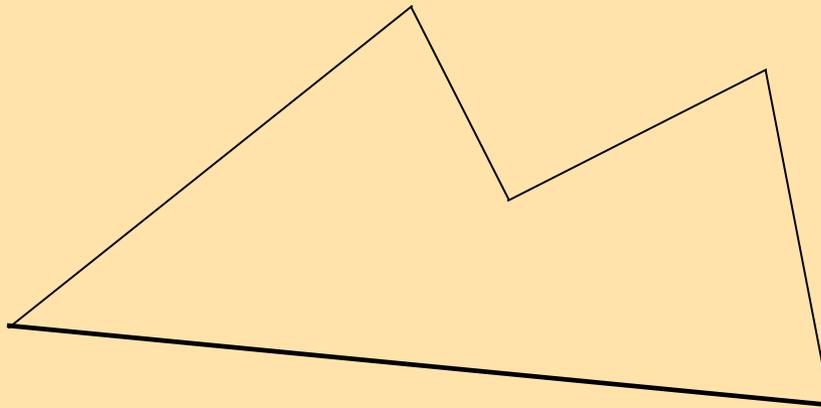


IL SEGMENTO **AC**, DI CUI **B** RISULTA PUNTO INTERNO, SI DICE **SOMMA** DEI DUE SEGMENTI DATI E SI SCRIVE  $AB+BC = AC$

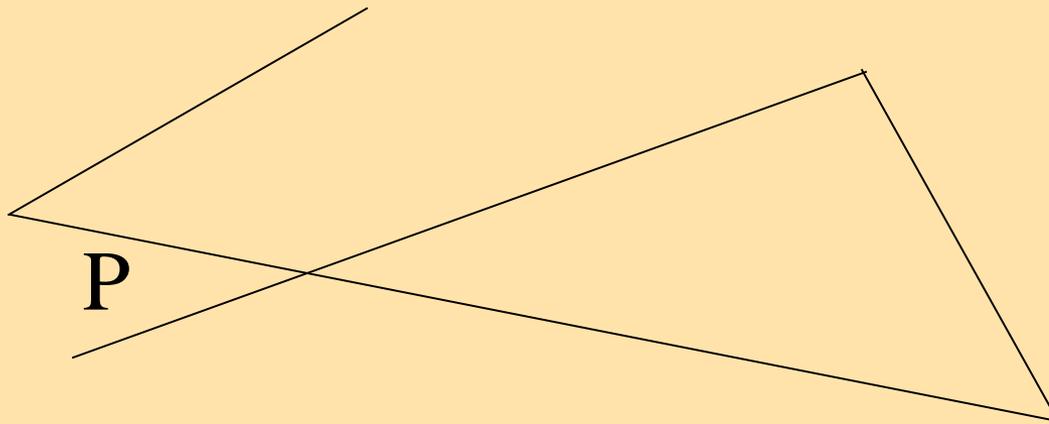
- LA FIGURA FORMATA DA PIU' SEGMENTI CONSECUTIVI SI CHIAMA **POLIGONALE O SPEZZATA APERTA**.
- I SEGMENTI SI DICONO **LATI DELLA SPEZZATA** E I LORO ESTREMI **VERTICI**.



- SE A UNA SPEZZATA APERTA SI AGGIUNGE IL SEGMENTO CHE NE CONGIUNGE GLI ESTREMI, SI OTTIENE UNA **POLIGONALE O SPEZZATA CHIUSA.**



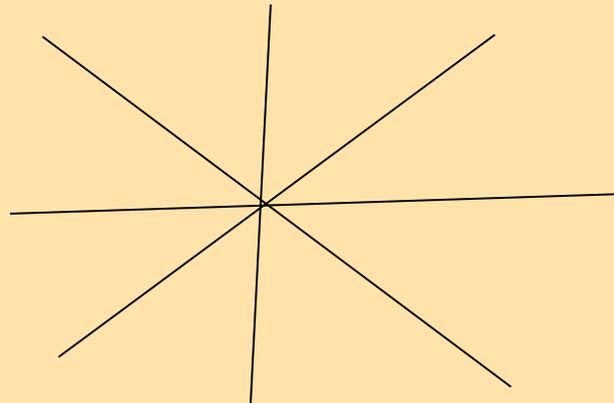
- SE DUE SEGMENTI NON CONSECUTIVI DI UNA POLIGONALE APERTA O CHIUSA HANNO UN PUNTO IN COMUNE (**P** PUNTO DI INTERSEZIONE), LA **POLIGONALE** SI DICE **INTRECCIATA**.



## POSIZIONI RECIPROCHE TRA RETTE

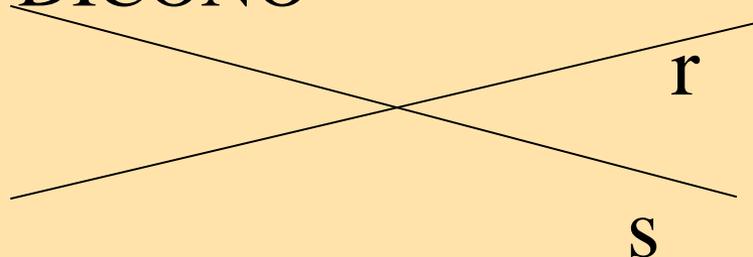
### FASCIO DI RETTE

- L'INSIEME DI TUTTE LE RETTE DI UN PIANO CHE PASSANO PER UNO STESSO PUNTO E' DETTO **FASCIO PROPRIO DI RETTE**, IL PUNTO E' DETTO **CENTRO DEL FASCIO**.

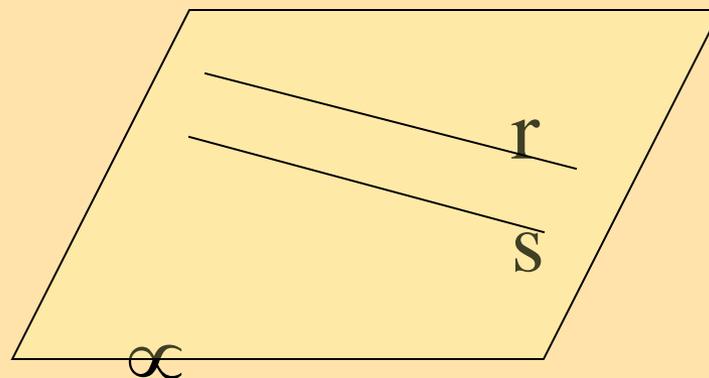


DUE RETTE DISTINTE O NON HANNO PUNTI  
IN COMUNE O NE HANNO UNO SOLTANTO.<sup>20</sup>

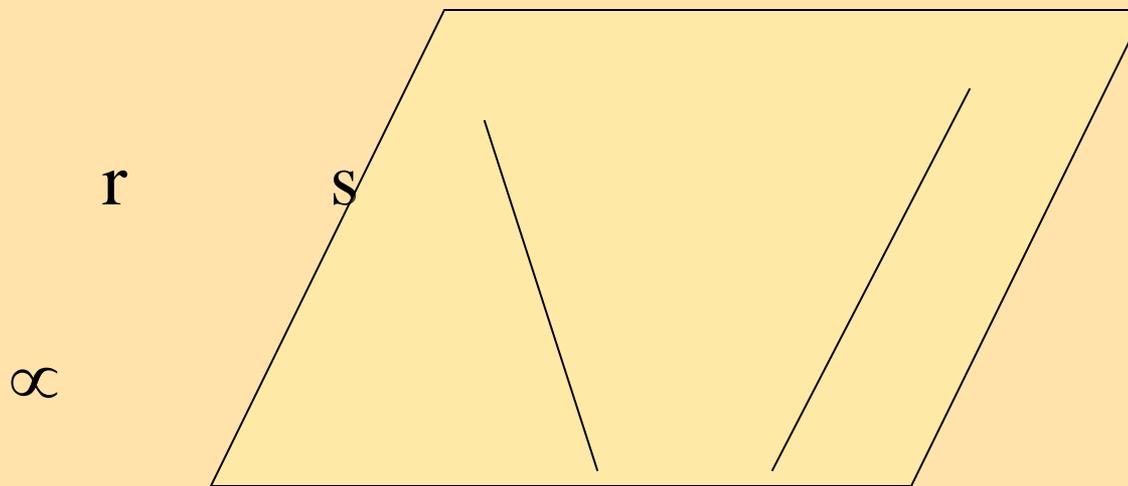
- SE DUE RETTE HANNO UN SOLO PUNTO IN COMUNE ESSE SI DICONO **INCIDENTI**.



- DUE RETTE DISTINTE DI UNO STESSO PIANO (COMPLANARI) SI DICONO **PARALLELE** SE NON HANNO ALCUN PUNTO IN COMUNE.



- DUE RETTE NON COMPLANARI CHE NON HANNO ALCUN PUNTO IN COMUNE SI DICONO **SGHEMBE**.



- PERTANTO DUE RETTE COMPLANARI DISTINTE O SONO INCIDENTI O SONO PARALLELE.

## POSTULATO DI EUCLIDE

- PER UN PUNTO ESTERNO AD UNA RETTA PASSA UNA ED UNA SOLA RETTA PARALLELA ALLA RETTA DATA.

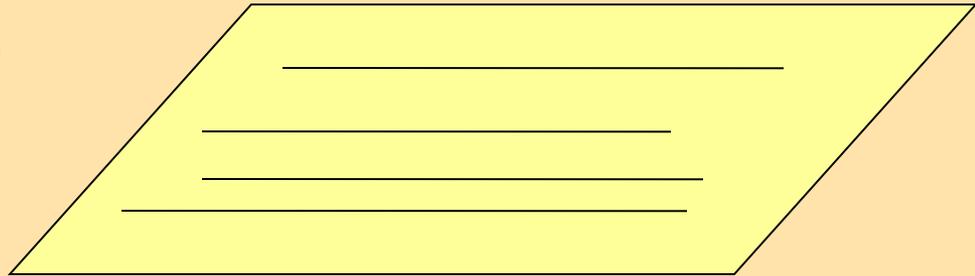
P



r



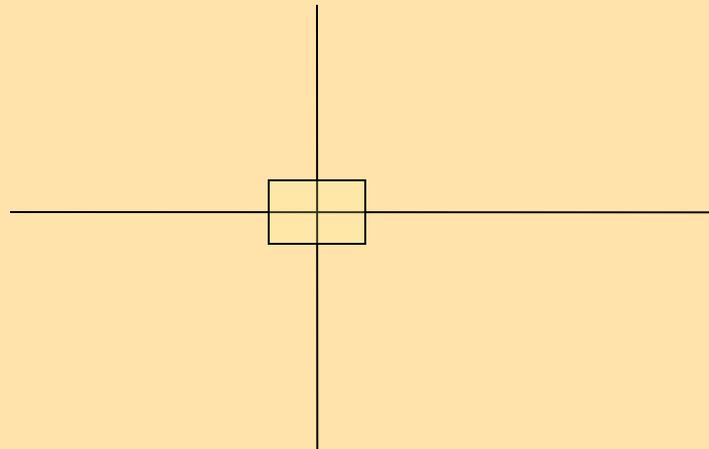
- IN UN PIANO, L'INSIEME DELLE RETTE PARALLELE A UNA RETTA DATA PRENDE IL NOME DI **FASCIO DI RETTE PARALLELE O FASCIO IMPROPRIO**.



- LA PROPRIETA' COMUNE A TUTTE LE RETTE DI UN FASCIO IMPROPRIO E' QUELLA DI AVERE **TUTTE LA STESSA DIREZIONE**.

## RETTE PERPENDICOLARI

- DUE RETTE SI DICONO **PERPENDICOLARI** ( $r \perp s$ ) SE, INCONTRANDOSI, FORMANO QUATTRO ANGOLI RETTI.



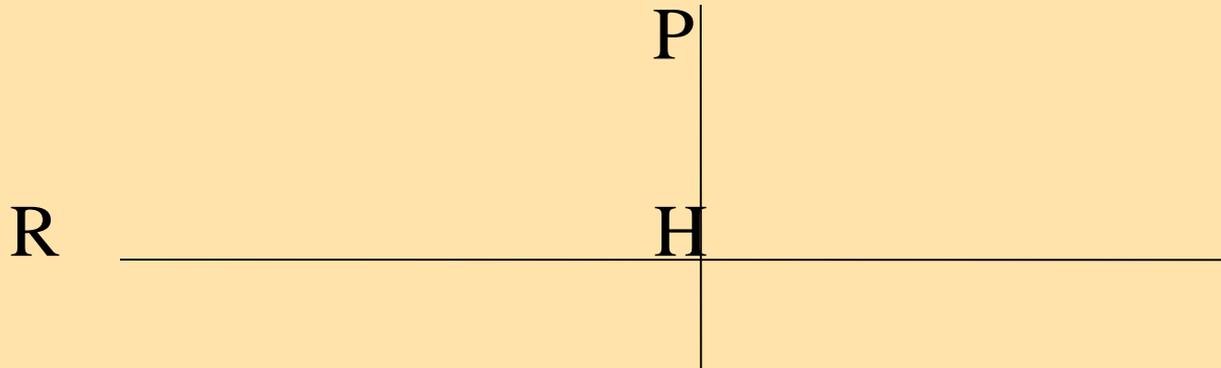
## TEOREMA: PROIEZIONE DI UN PUNTO SU UNA RETTA

Da un punto appartenente ad una retta o esterno ad essa si può condurre una ed una sola retta perpendicolare a quella data.

H= Piede della perpendicolare ad R, condotta dal punto P

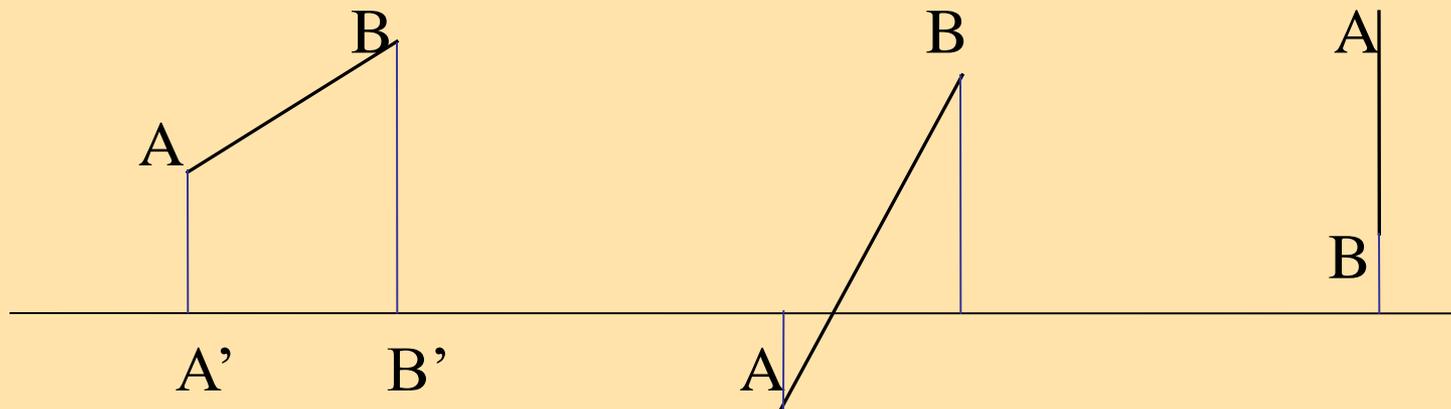
H= Proiezione ortogonale di P sulla retta R

Il segmento P-H si chiama Distanza di P dalla retta



## PROIEZIONE DI UN SEGMENTO

- **SI DICE PROIEZIONE DI UN SEGMENTO SOPRA UNA RETTA IL SEGMENTO CHE HA PER ESTREMI LE PROIEZIONI SULLA RETTA DEGLI ESTREMI DEL SEGMENTO DATO.**

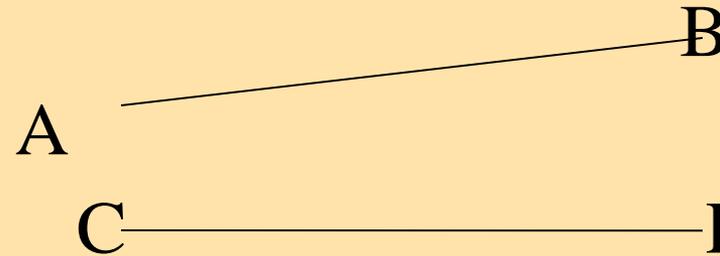


## CONFRONTO TRA SEGMENTI

- Confrontare due segmenti significa stabilire se sono congruenti o non lo sono.
- Nel caso in cui non siano congruenti significa stabilire quale tra i due sia il maggiore.
- Per confrontarli bisogna operare un movimento rigido in modo che l'estremo A coincida con l'estremo C e la semiretta A-B coincida con C-D.

## 1° CASO

Il 2° estremo B coincide con D, quindi il segmento  
 $AB \cong CD$  ;  $C \equiv A$ ,  $D \equiv B$



## 2° CASO

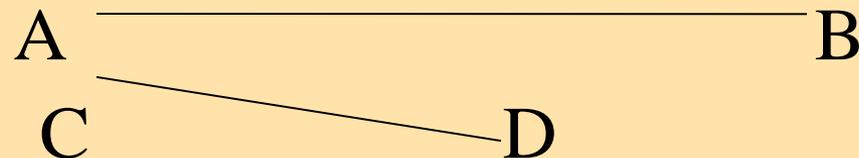
L'estremo B è un punto interno al segmento CD  
 $AB < CD$



## 3° CASO

L'estremo B è esterno al segmento CD

$AB > CD$



## PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

- Si chiama punto medio di un segmento un punto interno al segmento che lo divide in due parti congruenti.
- Si dice che A e B sono **SIMMETRICI** rispetto a M.



$$AM \cong MB \cong \frac{1}{2} AB$$

# SOMMA E DIFFERENZA DI SEGMENTI

- SE DUE SEGMENTI AB E BC SONO ADIACENTI, IL SEGMENTO AC COSTITUISCE LA LORO **SOMMA**:

$$AC = AB + BC \quad \begin{array}{c} A \qquad B \qquad C \\ \text{-----} \end{array}$$

- SI DICE **DIFFERENZA** DI DUE SEGMENTI, DI CUI IL PRIMO E' MAGGIORE O CONGRUENTE AL SECONDO, IL SEGMENTO CHE ADDIZIONATO AL SECONDO DA PER SOMMA IL PRIMO:

$$AB - CD = DB \quad \begin{array}{c} C \text{-----} D \\ \text{-----} \end{array}$$

## MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI DI UN SEGMENTO

- SI DEFINISCE MULTIPLO DI UN SEGMENTO **A** SECONDO IL NUMERO NATURALE  $n \geq 2$ , LA SOMMA DI  $n$  SEGMENTI CONGRUENTI AD **A**.

A

$$\underline{\hspace{10em}} \quad B = 4A$$

- **A** E' DETTO **SOTTOMULTIPLO** DI **B** SECONDO  $n$ .

# VERIFICA

1) Il punto geometrico è

- Un ente geometrico che non ha dimensioni
- Una piccola particella di materia
- Uno spazio piccolissimo
- Un segmento piccolissimo

2) Una retta è

- Un insieme di punti allineati giacenti su un stesso piano
- Una linea curva tracciata su un piano
- Un insieme di punti interni a una linea chiusa
- Un insieme di punti allineati sullo stesso piano

3) Un segmento è

- Una retta limitata da un punto
- Una parte di retta limitata da due punti
- Un insieme di punti allineati
- Un insieme di punti che hanno un'origine

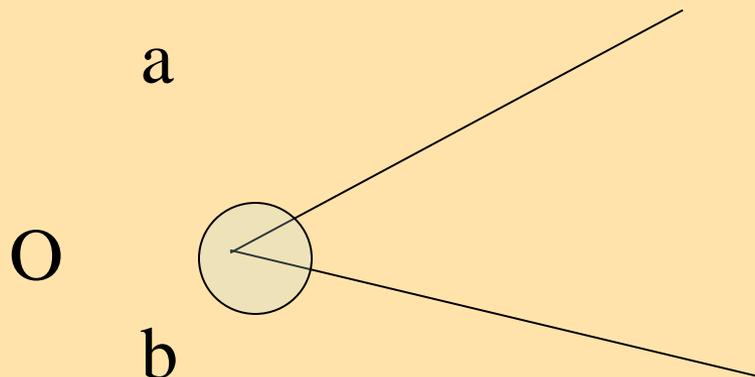
4) Due segmenti sono consecutivi se hanno

- Gli estremi in comune e stanno sulla stessa retta
- Un punto in comune e stanno sulla stessa retta
- Un punto in comune ma appartengono a rette diverse
- Tutti i punti in comune e appartengono alla stessa retta

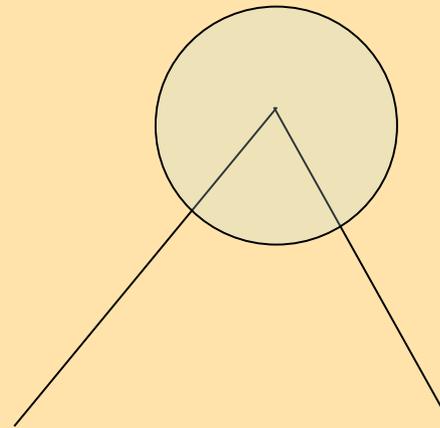
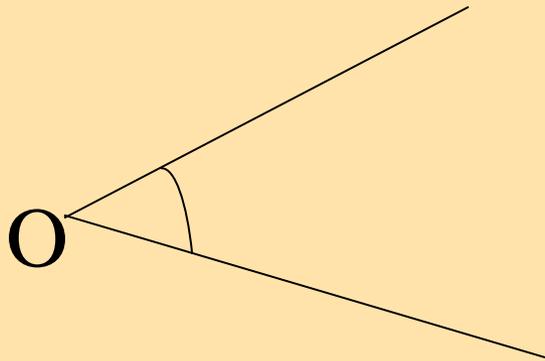
- 5) Disegna due segmenti, AB e CD, tali che  $AB > CD$  e costruisci il segmento somma e quello differenza
- 6) Dato il segmento AB disegna il suo multiplo secondo il numero 3
- 7) Dato il segmento AB costruisci il suo sottomultiplo prima secondo il numero 4 e poi secondo il numero 2.

# ANGOLI

- SI DEFINISCE **ANGOLO** CIASCUNA DELLE DUE PARTI IN CUI UN PIANO E' DIVISO DA DUE SEMIRETTE DISTINTE CON L'ORIGINE **O** IN COMUNE, SEMIRETTE COMPRESSE.
- LE SEMIRETTE **a** - **b** SI DICONO **LATI** DELL'ANGOLO E NE COSTITUISCONO IL CONTORNO.
- L'ORIGINE COMUNE SI DICE **VERTICE** DELL'ANGOLO.

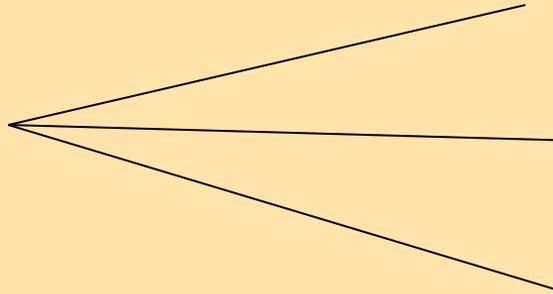


- DEI DUE ANGOLI FORMATI DALLE SEMIRETTE **a** E **b**: SI DICE **CONVESSO** QUELLO CHE NON CONTIENE AL SUO INTERNO I PROLUNGAMENTI DEI LATI ( $\hat{A}B$ ),
- **CONCAVO** QUELLO CHE CONTIENE AL SUO INTERNO I PROLUNGAMENTI DEI LATI.



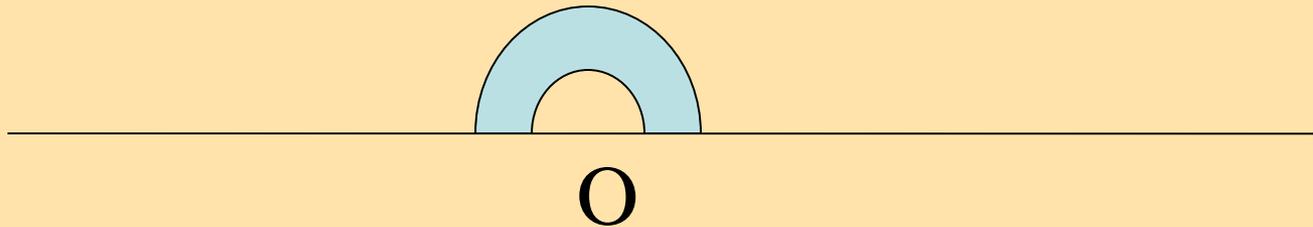
# BISETTRICE DI UN ANGOLO

La bisettrice di un angolo è la semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e lo divide in due parti congruenti



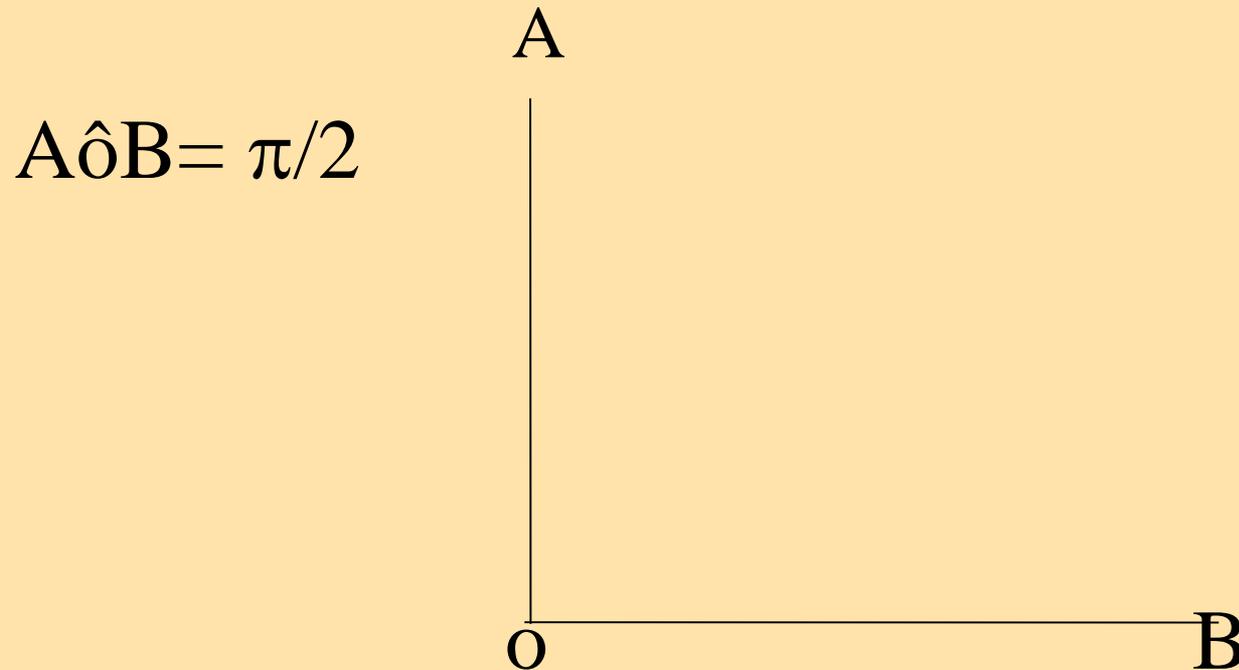
## ANGOLO PIATTO

- DUE SEMIRETTE CHE SIANO IL PROLUNGAMENTO L'UNA DELL'ALTRA DETERMINANO DUE ANGOLI, CIASCUNO DEI QUALI SI DICE **ANGOLO PIATTO**.



# ANGOLO RETTO

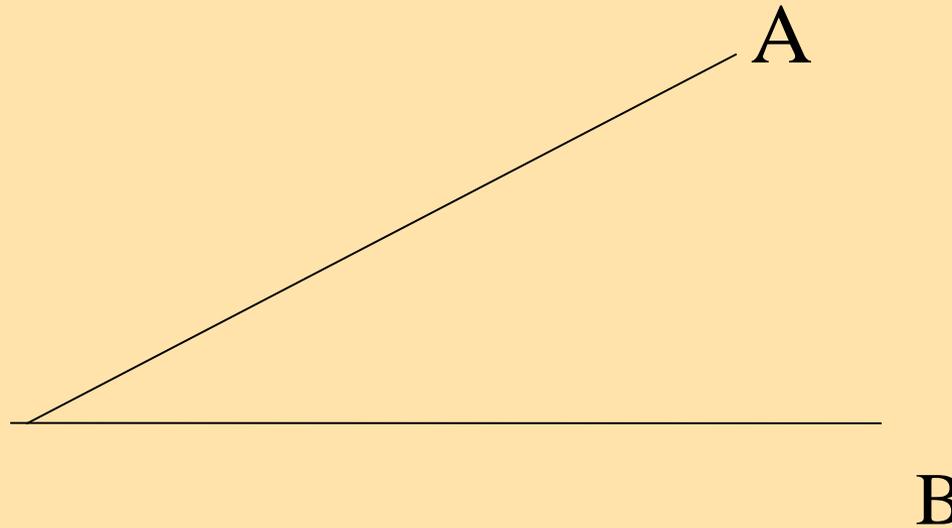
- LA META' DI UN ANGOLO PIATTO E' UN ANGOLO RETTO



## ANGOLO ACUTO

- UN ANGOLO SI DICE ACUTO QUANDO E' MINORE DI UN ANGOLO RETTO.

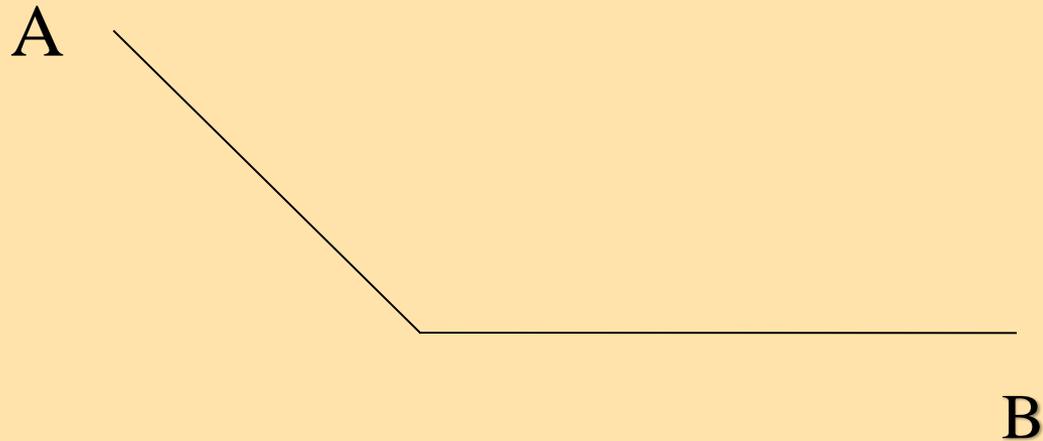
$\hat{A}B = \text{acuto}$



## ANGOLO OTTUSO

- UN ANGOLO SI DICE OTTUSO QUANDO E' MAGGIORE DI UN ANGOLO RETTO E MINORE DI UN ANGOLO PIATTO.

$\hat{A}B = \text{ottuso}$



## ANGOLO GIRO E NULLO

- **L'ANGOLO GIRO** E' L'UNIONE DI DUE ANGOLI PIATTI E COINCIDE CON TUTTO IL PIANO.



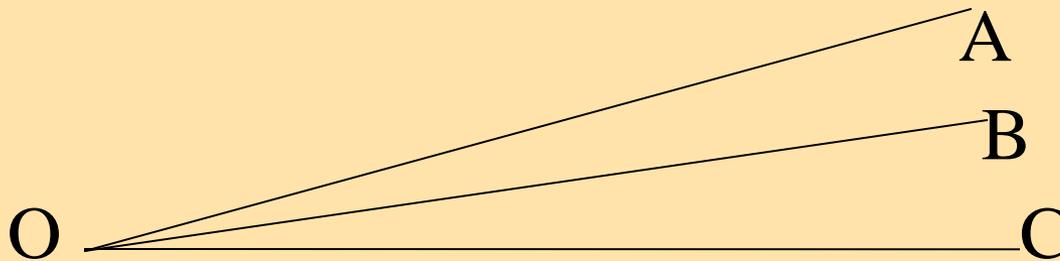
- **L'ANGOLO NULLO** E' L'UNIONE DEI PUNTI DI DUE SEMIRETTE SOVRAPPOSTE E SI RIDUCE AD UNA SEMIRETTA.



## ANGOLI CONSECUTIVI

- DUE ANGOLI DI UN PIANO SI DICONO CONSECUTIVI QUANDO HANNO LO STESSO VERTICE ED HANNO IN COMUNE SOLAMENTE I PUNTI DI UN LATO.

$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$  somma dei due angoli dati  
(angolo somma)

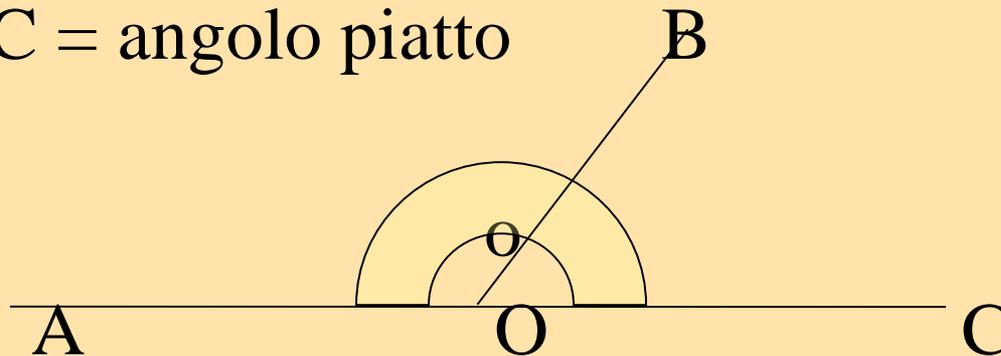


## ANGOLI ADIACENTI

- DUE ANGOLI SI DICONO ADIACENTI QUANDO, OLTRE AD ESSERE CONSECUTIVI, HANNO I LATI NON COMUNI SUL PROLUNGAMENTO L'UNO DELL'ALTRO. LA SOMMA DI DUE ANGOLI ADIACENTI E' UN **ANGOLO PIATTO**.

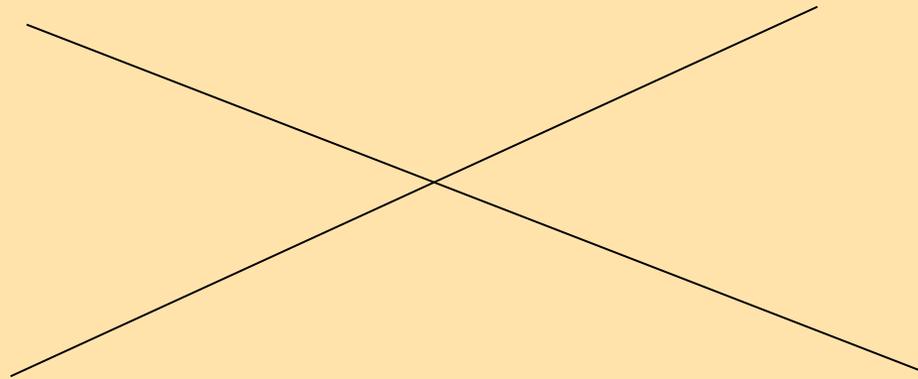
$\widehat{A\hat{O}B}$  e  $\widehat{B\hat{O}C}$  = angoli adiacenti

$\widehat{A\hat{O}B} + \widehat{B\hat{O}C}$  = angolo piatto



## ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE

- DUE ANGOLI CONVESSI SI DICONO **OPPOSTI AL VERTICE** SE I LATI SONO I PROLUNGAMENTI DEI LATI DELL'ALTRO. DUE ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE SONO UGUALI.



## CONFRONTARE DUE ANGOLI

- SIGNIFICA STABILIRE SE SONO CONGRUENTI O NON LO SONO.
- PER CONFRONTARE DUE ANGOLI  $\alpha$  E  $\beta$ , BISOGNA OPERARE UN MOVIMENTO RIGIDO CHE FACCIAMO SOVRAPPORRE O COINCIDERE I DUE VERTICI E UN LATO (UNO DEI DUE LATI DELL'ANGOLO).

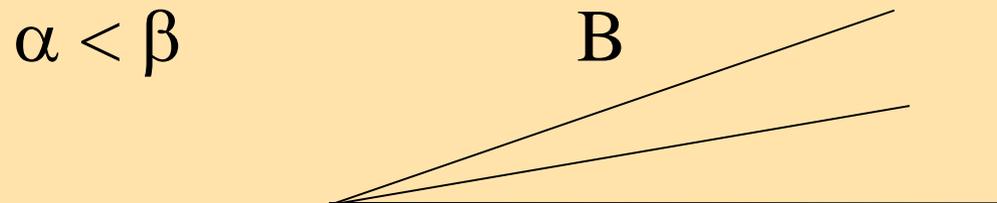
## 1° CASO

Se il lato B coincide con B1 allora



## 2° CASO

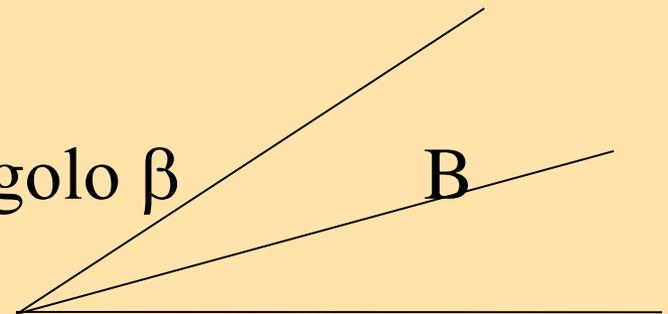
Se il lato B è esterno all'angolo  $\beta$



## 3° CASO

Se il lato B risulta interno all'angolo  $\beta$

$\alpha > \beta$



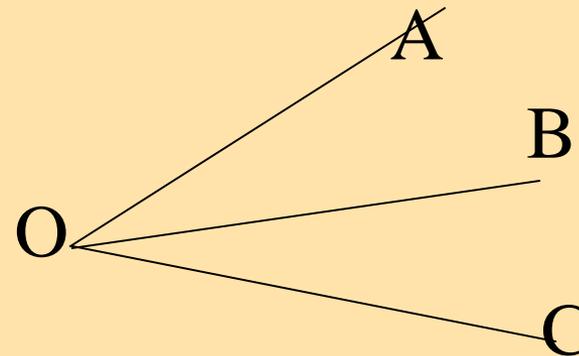
## SOMMA E DIFFERENZA DI ANGOLI.

- SE DUE ANGOLI  $\widehat{A\hat{O}B}$  E  $\widehat{B\hat{O}C}$  SONO CONSECUTIVI, L'ANGOLO  $\widehat{A\hat{O}C}$  COSTITUISCE LA LORO **SOMMA**.

$$\widehat{A\hat{O}C} = \widehat{A\hat{O}B} + \widehat{B\hat{O}C}$$

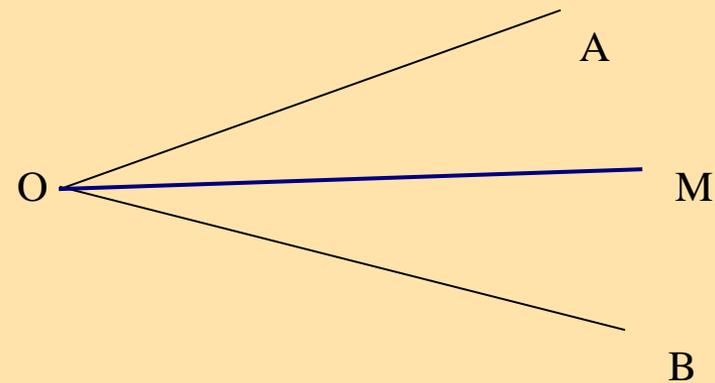
- SI DICE **DIFFERENZA** DI DUE ANGOLI, DI CUI IL PRIMO E' MAGGIORE O CONGRUENTE AL SECONDO, L'ANGOLO CHE ADDIZIONATO AL SECONDO DA PER SOMMA IL PRIMO.

$$\widehat{B\hat{O}C} = \widehat{A\hat{O}C} - \widehat{A\hat{O}B}$$



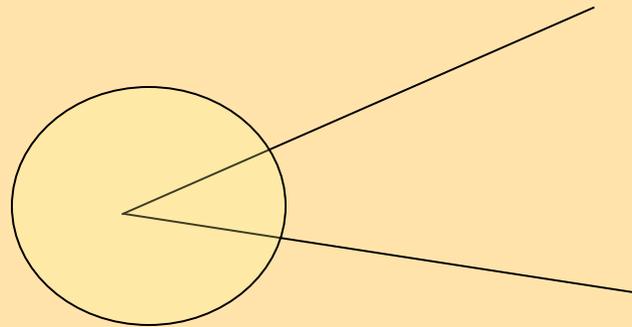
- SI CHIAMA **BISETTRICE** DI UN ANGOLO DI VERTICE **O**, LA SEMIRETTA DI ORIGINE **O**, INTERNA ALL'ANGOLO, CHE DIVIDE L'ANGOLO IN DUE PARTI CONGRUENTI.

$$\widehat{AOM} \cong \widehat{MOB} \cong \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$



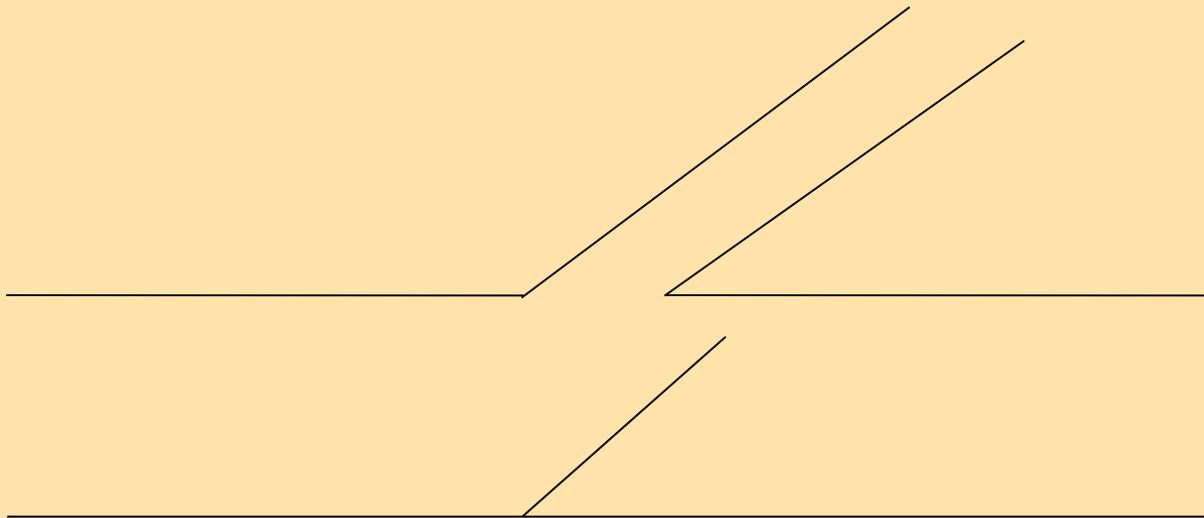
## ANGOLI ESPLEMENTARI

- DUE ANGOLI SI DICONO **ESPLEMENTARI** SE HANNO PER SOMMA UN ANGOLO **GIRO** ( $360^\circ$ ).



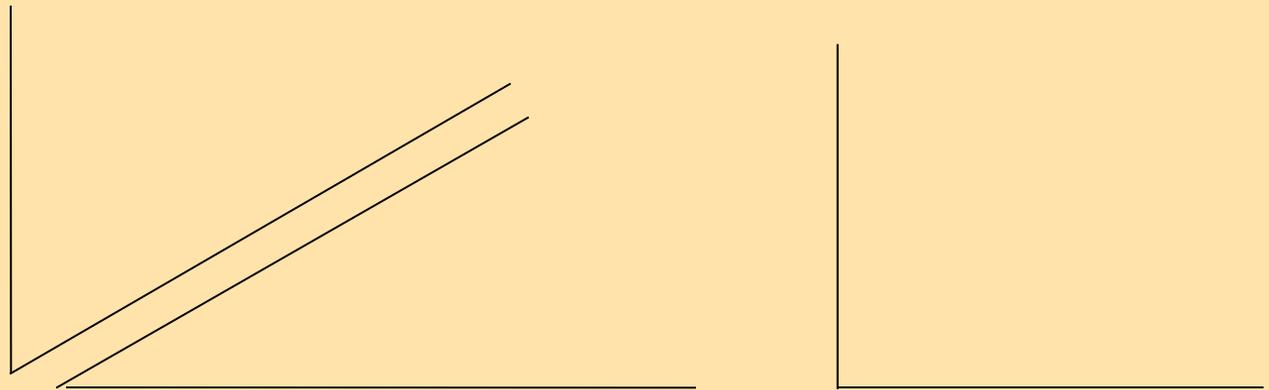
## ANGOLI SUPPLEMENTARI

- **DUE ANGOLI LA CUI SOMMA SIA UN ANGOLO PIATTO ( $180^\circ$ ) SI DICONO SUPPLEMENTARI.**



## ANGOLI COMPLEMENTARI

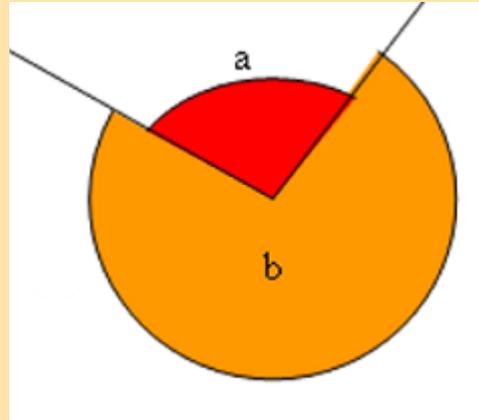
- DUE ANGOLI LA CUI SOMMA SIA CONGRUENTE A UN ANGOLO RETTO SI DICONO **COMPLEMENTARI**:



# VERIFICA

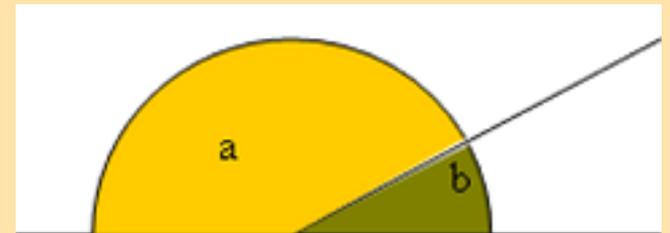
1) Con riferimento alla figura quali affermazioni sono vere ?

- a è convesso
- a è concavo
- b è convesso
- b è concavo



2) Gli angoli rappresentati in figura sono:

- Consecutivi ma non adiacenti
- Opposti al vertice
- Adiacenti



### 3) VERO O FALSO?

Per addizionare due angoli è necessario renderli adiacenti V F

La somma di due angoli consecutivi AOB e BOC  
è data dall'angolo AOC V F

La differenza di due angoli è un terzo angolo  
che addizionato a uno dei due angoli dà  
come somma l'altro V F

Per sottrarre due angoli bisogna sovrapporli  
in modo che il vertice dei due angoli coincida V F

4) Collega in tutti i modi possibili ogni frase della prima colonna con i tipi di angolo indicati nella seconda colonna in modo da rendere vero ciascun enunciato

E' sempre possibile individuare

- a) l'angolo complementare .....
- b) l'angolo supplementare.....
- c) l'angolo esplementare ....

- .....di un angolo piatto
- .....di un angolo giro
- .....di un angolo acuto
- .....di un angolo retto
- .....di un angolo ottuso